# JORDAN ELLENBERG

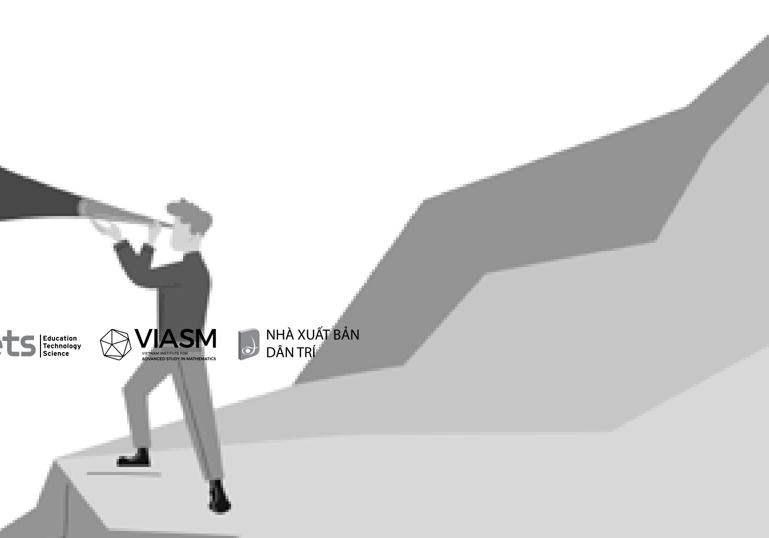
HOW NOT TO BE WRONG

# ĐỂ KHÔNG PHẠM SAI LẦM

## Toán học ẩn chứa trong cuộc sống

Nguyễn Trung Hiếu – Vũ Phan dịch

*(Tái bản lần thứ nhất)*



Einstein House
ets Education Technology Science
VIASM
NHÀ XUẤT BẢN DÂN TRÍ

Grateful acknowledgement is made for permission to reprint excerpts from the following copyrighted works:
"Soonest Mended" from The Double Dream of Spring by John Ashbery.
Copyright © 1966, 1970 by John Ashbery. Reprinted by permission of Georges Borchardt, Inc., on behalf of the author.
"Sitting on a Fence," words and music by Ian Cullimore and Paul Heaton.
Copyright © 1986 Universal Music Publishing Ltd. And Universal/Island Music Ltd. All rights in the United States and Canada are controlled and administered by Universal Polygram International Publishing, Inc. All rights reserved. Used by permissions. Reprinted by permission of Hal Leonard Corporation.



**Biên mục trên xuất bản phẩm của Thư viện Quốc gia Việt Nam**

Ellenberg, Jordan
Để khụng phạm sai lầm = How not to be wrong : Toỏn học ẩn chứa trong cuộc sống / Jordan Ellenberg ; Dịch: Nguyễn Trung Hiếu, Vũ Phan. - Tái bản lần thứ 1. - H. : Dân trí ; Công ty Xuất bản và Dữ liệu ETS, 2024. - 580 tr. ; 24 cm
ISBN 978-604-40-6014-9

1. Toán học 2. Cuộc sống
510 - dc23

DTK0189p-CIP

Góp ý về sách, liên hệ về bản thảo và bản dịch: publication@etsdata.vn
Liên hệ hợp tác về Nội dung số: digital@etsdata.vn
Liên hệ hợp tác xuất bản & truyền thông trên sách: project@etsdata.vn
Liên hệ dịch vụ tư vấn, đại diện & giao dịch bản quyền: rights@etsdata.vn
Kinh doanh Miền Bắc: Hotline: 093 614 9090 | Email: sales@alphabooks.vn
Kinh doanh Miền Nam: Hotline: 091 942 5402 | Email: sales.hcm@alphabooks.vn

*Dành tặng Tanya*

*"Những điều tốt đẹp nhất trong toán học xứng đáng được học không chỉ như một nghĩa vụ, mà còn đáng được hợp nhất thành một phần của suy nghĩ thường nhật và nghiền ngẫm trong trí óc với một sự khích lệ không ngừng nghỉ."*

- BERTRAND RUSSELL, "Nghiên cứu toán học" (1902)

# LỜI TỰA

Cuộc sống xung quanh chúng ta, như được thuật lại trong câu chuyện quán nước hằng ngày, hay trên báo chí, có rất nhiều những con số cùng suy diễn trên cơ sở những con số đó. Những suy diễn đó đôi khi đúng, nhưng đa phần lại rất không đúng. Chúng thường xuyên dẫn chúng ta đến những đánh giá sai lầm về quá khứ, hiện tại và tương lai, về những gì đang xảy ra ở tầm vĩ mô cũng như những gì xảy ra ngay bên cạnh chúng ta. Tại sao những con số, những suy diễn có vẻ có lý lại dẫn chúng ta đến những nhận thức sai lầm, đó là những gì tác giả Jordan Ellenberg muốn giải thích qua quyển sách *Để không phạm sai lầm*.

Khi một người bạn kể với bạn rằng anh họ của anh ta được chữa khỏi bệnh gút nhờ vào một bài thuốc thảo dược nào đó, bạn có nên tin hay không? Khi có nhiều hơn một người bạn kể lại cùng một câu chuyện đó thì niềm tin của bạn sẽ tăng lên bao nhiêu lần? Khi nào thì một chuỗi những sự kiện có thể được coi là có ý nghĩa thống kê? Khái niệm ý nghĩa thống kê thực sự có ý nghĩa hay không và chúng ta nên tin tưởng nó đến mức nào? Thế nào là xác suất tiên nghiệm, thế nào là xác suất hậu nghiệm, định lý Bayes nói gì? Đó là những điều mà Jordan Ellenberg giải thích cặn kẽ qua nhiều tình huống sinh động của cuộc sống.

Quyển sách này là món quà tuyệt vời cho những người hay đặt ra câu hỏi: khái niệm này trong toán học liên quan gì đến thực tế? Tác giả không chỉ đưa ra một mà vô cùng nhiều tình huống thực tế để minh hoạ cho những khái niệm toán học mà ông cho là quan trọng. Cần chú ý gì khi rút ra kết luận về những vị trí cần củng cố vỏ thép máy bay dựa trên thống kê vị trí vết đạn trên những máy bay chiến đấu quay về từ những trận không chiến khốc liệt. Tại sao dự đoán về tỷ lệ béo phì trong dân số đôi khi đưa ta đến những kết luận rất hài hước. Tại sao hồi quy tuyến tính thường xuyên dẫn ta đến những kết luận sai lầm? Tại sao ta không nên quá ngạc nhiên về những phát hiện thần bí về mật mã trong kinh Cựu ước? Tại sao cách vận dụng sai xác suất điều kiện sẽ đưa chúng ta đến những kết luận nguy hiểm trong việc sử dụng mạng xã hội để chống khủng bố?

Jordan Ellenberg vốn là một thần đồng. Anh tự học đọc khi mới hai tuổi. Lên sáu tuổi, anh giúp cô trông trẻ giải bài tập toán cấp ba, rồi sau đó đi học lớp giải tích ở Đại học Maryland ngay khi còn ở cấp hai. Sau khi giành hai huy chương vàng với điểm tuyệt đối và một huy chương bạc ở các kỳ thi IMO 1987, 1988, 1989, anh đi học toán ở Harvard và sau đó làm luận án tiến sĩ dưới sự hướng dẫn của Barry Mazur, một trong những nhà toán học lỗi lạc nhất nửa cuối thế kỷ 20. Bây giờ Jordan Ellenberg là giáo sư Đại học Wisconsin ở Madison. Tuy được đánh giá là một trong những chuyên gia hàng đầu trong lĩnh vực chuyên môn của mình là lý thuyết số, nhưng Jordan Ellenberg đã chiến thắng được lời nguyền thần đồng để trở thành một người bình thường, sống một cuộc sống gia đình như nhiều người khác, là một giáo sư đại học như nhiều giáo sư khác, được những người xung quanh tôn trọng như bất kỳ một công dân lương thiện nào khác, được các đồng nghiệp tôn trọng về những công trình nghiên cứu chuyên môn. Phần thần đồng của anh dường như chỉ được thể hiện một cách chói lọi trong tiểu thuyết đầu tay *Vua châu chấu* được giới phê bình đánh giá rất cao và bây giờ là quyển sách phi hư cấu *Để không phạm sai lầm.*

Văn phong của Jordan Ellenberg mang đậm tính hài hước của giới hàn lâm Mỹ. Các dịch giả đã hết sức nỗ lực để truyền tải tính hài hước này qua tiếng Việt nhưng phải thừa nhận rằng đó là điều rất khó, vì hài hước không hoàn toàn chỉ là hiệu ứng của ngôn từ mà còn bị chi phối rất nhiều bởi bối cảnh văn hoá. Đối với những tình huống thực tế lấy từ bóng rổ, bầu cử ở Mỹ hay những cuộc tranh luận xung quanh kinh Cựu ước, độc giả Việt Nam có thể sẽ không có cùng mức độ nhận thức trực quan như độc giả Mỹ. Tuy vậy, tôi tin rằng cuốn sách này sẽ đem đến cho bạn đọc những niềm vui thực sự, nếu không phải là tiếng cười sảng khoái bên ngoài thì sẽ là tiếng cười rộn ràng ở bên trong.

Ngô Bảo Châu

Giám đốc Khoa học, Viện nghiên cứu cao cấp về Toán

# MỤC LỤC

## PHẦN 3

KỲ VỌNG



## PHẦN 4

HỒI QUY



## PHẦN 5

SỰ TỒN TẠI



# EM SẼ SỬ DỤNG NHỮNG KIẾN THỨC NÀY VÀO LÚC NÀO?

Ngay lúc này, trong một lớp học ở đâu đó trên thế giới, một sinh viên đang lớn tiếng tranh luận với giáo viên toán. Người giáo viên vừa yêu cầu cô bé cuối tuần ngồi tập trung tính ba mươi tích phân xác định.

Có những việc khác mà cô bé thích làm hơn. Thực tế là hầu như việc nào khác cô cũng thấy thích hơn. Cô bé chắc chắn điều này bởi đã bỏ ra phần lớn ngày nghỉ cuối tuần trước để làm ba mươi bài tích phân xác định gần giống thế. Cô không hiểu ý nghĩa của việc này và thắc mắc với giáo viên. Trong cuộc nói chuyện, cô bé đã hỏi một câu mà giáo viên của cô sợ nhất:

*"Em sẽ sử dụng những kiến thức này vào lúc nào?"*

Bây giờ, giáo viên toán có thể sẽ trả lời kiểu như này:

"Tôi biết có thể em thấy mấy thứ này buồn tẻ, nhưng hãy nhớ rằng, hiện giờ em chưa biết sau này mình sẽ làm nghề gì – có thể em thấy chúng không liên quan lúc này, nhưng biết đâu em sẽ tham gia vào một lĩnh vực mà ở đó việc nhanh chóng giải được bằng tay các tích phân là vô cùng quan trọng."

Câu trả lời khó có thể làm cô thỏa mãn. Bởi đó là lời nói dối. Cả thầy và trò đều biết đó là lời nói dối. Số người trưởng thành có lúc nào đó cần đến tích phân của $(1 - 3x + 4x^2)^{-2}dx$, hay công thức tính cosine của 3θ, hay phép chia đa thức có lẽ không vượt quá vài chục ngàn.

Lời nói dối đó cũng không làm thỏa mãn người giáo viên. Tôi biết quá đi chứ: trong nhiều năm làm việc với tư cách giáo sư toán, tôi đã yêu cầu hàng trăm sinh viên đại học tính rất nhiều tích phân xác định.

Thật may là có một câu trả lời hay hơn. Đại khái là thế này: "Toán học không phải là một chuỗi các tính toán được thực hiện theo thói quen cho tới khi em mất hết kiên nhẫn và không thể chịu thêm nổi – mặc dù rất có thể đó có vẻ là cách mà các em đang được dạy *toán học*. Vai trò của tích phân trong toán học cũng giống như vai trò của việc nâng tạ và làm dẻo trong bóng đá. Nếu các em muốn chơi bóng đá – ý tôi là, *chơi một cách nghiêm túc*, ở cấp độ thi đấu – thì các em phải thực hiện rất nhiều các bài tập buồn tẻ, lặp đi lặp lại, và có vẻ vô nghĩa. Các cầu thủ chuyên nghiệp có bao giờ sử dụng các bài tập đó khi chơi bóng không? Hừ, các em sẽ không bao giờ thấy ai chạy trên sân bóng mà nâng tạ hay chạy zig zag giữa các chướng ngại vật hình nón. Nhưng các em sẽ thấy các cầu thủ sử dụng sức mạnh, tốc độ, nhận thức, và sự linh hoạt mà họ tích lũy được thông qua việc thực hiện các bài tập tẻ nhạt đó hết tuần này qua tuần khác. Thực hiện các bài tập đó là một phần của việc tập chơi bóng đá.

"Nếu muốn chơi bóng để kiếm sống, hay thậm chí là chơi cho một đội bóng của trường đại học, các em sẽ phải bỏ ra nhiều tuần lễ tẻ nhạt trên sân tập. Chẳng có cách nào khác. Nhưng có một tin tốt đây. Nếu các bài tập như vậy là quá nặng thì các em vẫn có thể chơi bóng để giải trí với bạn bè. Các em có thể cảm thấy thích thú thực hiện một đường chuyền khéo léo xuyên thủng hàng phòng ngự hoặc ghi bàn bằng cú sút xa như các cầu thủ chuyên nghiệp. Các em sẽ khỏe mạnh và vui vẻ hơn so với việc ngồi nhà xem bóng đá trên TV.

"Toán học cũng khá giống vậy. Các em rất có thể không định theo đuổi nghiệp toán học. Như thế là bình thường – hầu hết mọi người đều như vậy. Nhưng em có thể vẫn cứ làm toán. Mà các em có thể vẫn đang làm toán rồi, ngay cả khi các em không gọi đó là toán. Toán học là một phần không thể tách rời trong cách ta suy luận. Và toán học giúp các em giỏi hơn trong mọi việc. Hiểu toán giống như đeo một đôi kính X-quang giúp nhìn thấu các cấu trúc bên dưới bề mặt lộn xộn và hỗn loạn của thế giới. Toán học là môn khoa học giúp tránh phạm sai lầm, các kỹ thuật và đặc điểm của nó được đúc rút qua nhiều thế kỷ làm việc bền bỉ và tranh cãi đanh thép. Với công cụ toán học trong tay, em có thể hiểu thế giới theo một cách sâu sắc hơn, vững chắc hơn và có ý nghĩa hơn. Tất cả những gì các em cần là một người thầy hướng dẫn, hay thậm chí một cuốn sách, dạy những quy tắc và chiến thuật cơ bản. Tôi sẽ là thầy của các em. Tôi sẽ chỉ cho các em cách làm thế nào."



Vì thời gian có hạn, chẳng mấy khi tôi thực sự nói những điều này ở trên lớp. Nhưng trong một cuốn sách thì tôi có thời gian để dài dòng hơn một chút. Tôi hy vọng có thể bổ sung vào những tuyên bố to tát mà tôi vừa nêu bằng cách chỉ ra rằng các vấn đề mà chúng ta nghĩ đến hằng ngày – các vấn đề như chính trị, y tế, thương mại, thần học – đều hàm chứa rất nhiều các khái niệm toán học. Hiểu được điều đó giúp bạn thu nhận được vốn hiểu biết sâu sắc hơn bất kỳ phương tiện nào khác mang lại.

Ngay cả khi tôi thực sự trả lời cô ấy một cách đầy cảm hứng như vậy, sinh viên của tôi rất có thể – ấy là nếu cô ấy thực sự sắc sảo – chưa bị thuyết phục.

"Nghe ổn đấy thầy," cô ấy sẽ nói, "nhưng nó khá là trừu tượng. Thầy nói rằng với toán học trong tay, ta có thể hiểu đúng những điều mà đáng lẽ nếu không có toán ta sẽ hiểu sai. Nhưng cụ thể là những loại vấn đề nào? Xin cho em một *ví dụ cụ thể*."

Và khi đó, tôi sẽ kể cho cô bé nghe câu chuyện về Abraham Wald và những lỗ đạn còn thiếu.

## ABRAHAM WALD VÀ NHỮNG LỖ ĐẠN CÒN THIẾU

Câu chuyện này, như nhiều câu chuyện về Đại chiến Thế giới lần thứ hai khác, bắt đầu khi quân Đức Quốc xã săn lùng một người Do Thái ở châu Âu và kết thúc với sự hối tiếc của chúng về điều đó. Abraham Wald sinh năm 1902 ở thành phố Klausenburg, bấy giờ thuộc Đế quốc Áo-Hung. Khi Wald còn là một thanh niên, Đại chiến Thế giới lần thứ nhất kết thúc và thành phố quê anh đã trở thành vùng Cluj, Romania. Là cháu nội một giáo sĩ Do Thái và con trai một thợ làm bánh cho người Do Thái, nhưng cậu thanh niên Wald đã là một nhà toán học ngay từ rất sớm. Tài năng toán học của anh nhanh chóng được phát hiện, và anh được nhận vào học toán ở trường Đại học Viên, ở đó anh bị thu hút vào các chủ đề trừu tượng và khó hiểu ngay cả theo các tiêu chuẩn của toán học thuần túy: lý thuyết tập hợp và không gian mêtric.

Nhưng khi các nghiên cứu của Wald hoàn tất, lúc đó là giữa thập niên 1930, nước Áo vẫn chìm trong cơn kiệt quệ kinh tế, và không có cơ hội cho người nước ngoài trở thành giáo sư ở Viên. Oskar Morgenstern đã giúp Wald có một công việc để tồn tại. Morgenstern về sau sẽ nhập cư vào Mỹ và góp phần phát minh ra lý thuyết trò chơi, nhưng vào năm 1933 ông là giám đốc của Viện nghiên cứu kinh tế Áo, nơi ông thuê Wald với một mức lương bèo bọt để làm các công việc vặt liên quan tới toán học. Điều này hóa ra lại là một bước đệm tốt cho Wald: kinh nghiệm trong lĩnh vực kinh tế giúp anh giành được học bổng tại Ủy ban Cowles, một viện kinh tế lúc đó được đặt ở Colorado Springs (Mỹ). Bất chấp tình hình chính trị nước Áo ngày càng xấu đi, Wald vẫn lưỡng lự chưa quyết định đi một bước có thể khiến anh rời xa khỏi toán học thuần túy. Nhưng rồi việc Đức quốc xã xâm chiếm Áo giúp quyết định của Wald trở nên dễ dàng hơn đáng kể. Chỉ sau vài tháng ở Colorado, anh được mời làm giáo sư thống kê ở Đại học Columbia; anh lại đóng gói đồ đạc và lên đường tới New York.

Và đó là nơi anh tham chiến.

Nhóm nghiên cứu thống kê (SRG), nơi Wald dành nhiều thời gian trong Đại chiến Thế giới lần thứ hai, là một chương trình bí mật móc nối sức mạnh tổng hợp của các nhà thống kê Hoa Kỳ với các nỗ lực chiến tranh – một thứ giống như Dự án Manhattan, chỉ khác là



các vũ khí được phát triển ở đây là các phương trình chứ không phải chất nổ. Và SRG thực ra lại ở *chính* Manhattan, nằm tại số 401 phía Tây phố 118 Morningside Heights, chỉ cách Đại học Columbia vài dãy nhà. Tòa nhà này giờ đây là khu nhà ở cho giảng viên Đại học Columbia và văn phòng của một số tiến sĩ, nhưng vào năm 1943 nó là trung tâm đầu não ồn ào và náo nhiệt của toán học thời chiến. Tại Nhóm Toán học ứng dụng – Columbia, hàng tá phụ nữ trẻ gò lưng bên những máy tính cơ Marchant tính toán các biểu thức để tìm quỹ đạo bay tối ưu cho máy bay tiêm kích sao cho luôn bám sát máy bay địch. Ở một tòa nhà khác, một nhóm các nhà nghiên cứu từ Princeton đang phát triển các quy trình đánh bom chiến lược. Và nhóm dự án bom hạt nhân của Columbia ở ngay phòng bên cạnh.

Nhưng trong số các nhóm này, SRG là nhóm có nhiều quyền lực nhất và có ảnh hưởng lớn nhất. Môi trường này là sự kết hợp giữa sự cởi mở và sức mạnh to lớn về trí tuệ của một cơ sở hàn lâm với ý thức chung về mục đích vốn chỉ xuất hiện trong những tình huống sống còn. “Khi chúng tôi đưa ra các khuyến nghị,” giám đốc W. Allen Wallis viết, “thường thì không phải lúc nào mọi thứ cũng suôn sẻ. Máy bay xung trận với súng máy được nạp lẫn lộn các loại đạn theo đúng khuyến nghị của Jack Wolfowitz và phi công có lúc trở về, có lúc thì không. Máy bay của hải quân phóng những quả tên lửa với lượng thuốc nổ vượt qua được các kiểm định mẫu của Abe Girshick, có thể các quả tên lửa sẽ phát nổ và phá hủy chính máy bay của chúng tôi cùng phi công hoặc có thể chúng sẽ tiêu diệt mục tiêu.”

Tài năng toán học của nhóm cũng tương xứng với tầm quan trọng của nhiệm vụ. Theo lời của Wallis, SRG là “nhóm những nhà thống kê lỗi lạc nhất từng được tổ chức, cả về số lượng lẫn chất lượng.” Frederick Mosteller, người thành lập khoa thống kê của Harvard sau này, từng là thành viên của nhóm. Cả Leonard Jimmie Savage, nhà tiên phong cho lý thuyết ra quyết định và người ủng hộ nhiệt thành cho lĩnh vực sau này gọi là thống kê Bayes* cũng ở đó. Norbert Wiener, nhà toán học của MIT và là nhà sáng tạo ra điều khiển học, cũng tham gia nhưng không thường xuyên. Đây là nhóm mà Milton Friedman, nhà kinh tế học đoạt giải Nobel sau này, thường là người xuất sắc thứ tư.

Người *thông minh nhất* phòng thường là Abraham Wald. Wald từng là thầy của Allen Wallis ở trường Columbia và đóng vai trò người lãnh đạo về toán học của nhóm. Do vẫn là "công dân của nước thù địch" nên theo nguyên tắc ông không được phép xem các báo cáo mật của mình; có một câu chuyện đùa trong nội bộ SRG rằng những người thư ký được lệnh giật các trang ghi chép ra khỏi tay ông ngay sau khi ông vừa viết xong. Wald, ở mức độ nào đó, là thành viên không được trông đợi. Ông lúc nào cũng thiên về sự trừu tượng và xa rời những ứng dụng trực tiếp. Nhưng động cơ của ông về việc sử dụng tài năng để chống lại phe Trục là không có gì phải bàn cãi. Và khi bạn cần biến một ý tưởng mơ hồ thành toán học vững chắc, Wald là người bạn muốn có bên cạnh.

Và câu hỏi là thế này. Để giúp máy bay khó bị đối phương bắn hạ, ta sẽ tăng cường giáp cho nó. Nhưng lớp vỏ giáp khiến máy bay nặng hơn và chiếc máy bay nặng hơn thì khó di chuyển hơn và tốn nhiên liệu hơn. Bọc giáp quá nhiều là vấn đề; nhưng bọc quá ít cũng là vấn đề. Phương án tối ưu nằm đâu đó ở giữa. Lý do một nhóm các nhà toán học tập trung trong một căn hộ ở New York chính là để tìm ra cách tối ưu đó.

Quân đội đến gặp SRG với một vài dữ liệu họ cho là có thể hữu dụng. Khi các máy bay chiến đấu Mỹ quay trở lại sau khi tham chiến ở châu Âu, chúng bị phủ đầy các lỗ đạn. Nhưng sự hư hại không phân bố đều trên máy bay. Phần thân máy bay có nhiều lỗ đạn, còn ở động cơ thì không có mấy.

* Savage gần như mù hẳn và có lúc chỉ ăn ruốc cầm cự trong sáu tháng để chứng minh cho một luận điểm về thám hiểm Bắc Cực. Tôi nghĩ rằng điều này đáng được nhắc tới.



| **Bộ phận của máy bay** | **Số lỗ đạn trung bình trên mỗi foot vuông** |
|---|---|
| Động cơ | 1,11 |
| Thân | 1,73 |
| Hệ thống nhiên liệu | 1,55 |
| Phần còn lại của máy bay | 1,8 |

Các sĩ quan thấy một cơ hội nâng cao hiệu suất; có thể dùng ít giáp hơn mà vẫn bảo vệ được máy bay nếu tập trung lớp giáp ở những nơi cần thiết nhất, chính là nơi mà máy bay thường bị trúng đạn nhiều nhất. Nhưng chính xác là cần thêm bao nhiêu giáp cho các phần đó của máy bay? Đó là câu trả lời họ muốn khi tìm đến Wald. Nhưng câu trả lời mà họ nhận được lại hoàn toàn khác.

Lớp giáp, Wald nói, không cần dùng cho những nơi có nhiều lỗ đạn. Nó cần được bọc ở những nơi *không có* lỗ đạn: động cơ.

Sự sáng suốt của Wald đơn giản nằm ở việc hỏi: các lỗ đạn còn thiếu ở đâu? Các lỗ đạn đáng lẽ phải rải khắp trên vỏ động cơ, nếu các hư hại phân bố đều nhau trên toàn bộ máy bay? Wald khá chắc chắn là đã biết câu trả lời. Các lỗ đạn còn thiếu nằm trên các máy bay bị hạ. Lý do các máy bay quay trở về có ít lỗ đạn trên động cơ là vì những chiếc bị trúng nhiều đạn trên động cơ đã không thể quay trở lại. Việc nhiều máy bay quay trở lại căn cứ với phần thân lỗ chỗ vết đạn là một bằng chứng mạnh mẽ rằng trúng đạn ở thân máy bay có thể (và do đó nên) chấp nhận được. Nếu đến phòng hồi sức cấp cứu, bạn sẽ trông thấy số người bị bắn ở chân nhiều hơn rất nhiều so với số người bị bắn ở ngực; đó là vì những người bị bắn vào ngực đã không thể nào qua khỏi.

Đây là một mẹo toán học cũ khiến bức tranh hoàn toàn rõ ràng: *gán cho một vài biến số giá trị không*. Trong trường hợp này, biến số cần điều chỉnh là xác suất để một máy bay trúng đạn vào động cơ mà vẫn quay về được. Gán cho xác suất đó giá trị không có nghĩa là một lần trúng đạn duy nhất vào động cơ chắc chắn sẽ triệt hạ chiếc máy bay đó. Như vậy thì dữ liệu sẽ trông như thế nào? Bạn có thể thấy những chiếc máy bay quay trở về với vết đạn lỗ chỗ trên cánh, thân và mũi – nhưng không có lỗ nào trên động cơ. Các nhà phân tích quân sự có hai phương án giải thích việc này: hoặc là đạn của người Đức bắn trúng tất cả các phần của máy bay trừ động cơ, hoặc là động cơ là tử huyệt của máy bay. Cả hai giả thuyết đều giải thích cho dữ liệu đó, nhưng giả thuyết thứ hai hợp lý hơn nhiều. Lớp giáp cần được bọc ở những nơi không có lỗ đạn.

Khuyến nghị của Wald nhanh chóng được áp dụng và vẫn còn được hải quân, không quân sử dụng trong chiến tranh Triều Tiên và Việt Nam. Tôi không biết chính xác bao nhiêu máy bay chiến đấu của Mỹ đã được cứu sống, mặc dù các chuyên gia phân tích dữ liệu thế hệ sau của SRG trong quân đội ngày nay hẳn nắm rất rõ. Các quan chức quốc phòng Mỹ biết rõ rằng bên thắng trận không chỉ nhờ vào việc gan dạ hơn đối phương hay được Chúa ưu ái hơn. Kẻ chiến thắng thường là những người giảm được 5% số máy bay bị bắn hạ, hoặc tiết kiệm thêm 5% nhiên liệu, hoặc có thêm 5% lượng chất dinh dưỡng cho bộ binh với chỉ 95% chi phí. Đó không phải là những gì làm nên các bộ phim về đề tài chiến tranh, mà là những gì làm nên một cuộc chiến thực thụ. Và nơi nào toán học cũng góp mặt.

Tại sao Wald nhìn thấy điều mà các sĩ quan, vốn có kiến thức và hiểu biết vượt trội về không chiến, không nhìn thấy? Đó là nhờ thói quen tư duy được toán học đào luyện của ông. Một nhà toán học luôn luôn hỏi: "Bạn đang đặt ra những giả định nào? Và chúng đã thỏa đáng chưa?" Điều này có thể gây khó chịu. Nhưng nó cũng có thể rất hiệu quả. Trong trường hợp này, các sĩ quan đang đặt ra một giả định vô thức: rằng các máy bay quay về là một mẫu ngẫu nhiên của tất cả các máy bay. Nếu giả định này đúng, bạn có thể rút ra kết luận về phân bố của các lỗ đạn trên tất cả máy bay bằng cách xem xét phân bố lỗ đạn chỉ trên các máy bay sống sót. Ngay sau khi đặt ra giả thuyết đó thì bạn chỉ mất một khoảnh khắc để nhận ra rằng nó hoàn toàn sai; không có lý do gì để kỳ vọng các máy bay có chung một khả năng sống sót như nhau bất kể chúng bị trúng đạn ở đâu. Trong một đoạn thuật ngữ toán học mà chúng ta sẽ trở lại ở chương 15, tỷ lệ sống sót và vị trí lỗ đạn *có tương quan với nhau*.



Lợi thế khác của Wald là thiên hướng trừu tượng bẩm sinh. Wolfowitz, người từng nghiên cứu cùng Wald ở Columbia, viết rằng ông thích làm "những thứ trừu tượng nhất" và ông "luôn sẵn sàng nói về toán học nhưng không quan tâm đến việc phổ biến hay các ứng dụng đặc biệt."

Bản tính của Wald khiến ông khó tập trung chú ý vào các bài toán ứng dụng. Các chi tiết của máy bay và súng trong mắt ông chỉ như lớp vỏ bề ngoài, ông bị thu hút vào vấn đề toán học gắn kết với câu chuyện. Đôi khi, cách tiếp cận đó có thể bỏ qua các điểm then chốt. Nhưng nó cũng khiến bạn thấy bộ sườn chung của vấn đề vốn bề ngoài trông rất khác nhau. Nhờ vậy, bạn sẽ có kinh nghiệm hữu ích ngay cả trong các lĩnh vực mà dường như chẳng có chút kinh nghiệm gì.

Với một nhà toán học, cấu trúc ẩn sau bài toán lỗ đạn là một hiện tượng gọi là *sự thiên vị kẻ sống sót*. Nó xảy ra hết lần này đến lần khác, dưới đủ mọi hoàn cảnh. Và khi bạn quen với nó, giống như Wald, bạn sẽ là người đầu tiên chú ý tới nó bất kể nó có lẩn trốn ở đâu.

Các quỹ tương hỗ cũng vậy. Đánh giá hiệu quả của quỹ là lĩnh vực mà bạn không muốn sai sót, dù chỉ một chút. Một chuyển dịch 1% trong tăng trưởng thường niên có thể là sự khác biệt giữa một tài sản tài chính có giá trị và một con chó. Các quỹ trong danh mục Large Blend của Morningstar, đầu tư vào các công ty có thể coi là đại diện cho S&P 500, có vẻ giống với loại đầu tiên. Các quỹ trong loại này tăng trưởng trung bình 178,4% trong giai đoạn từ năm 1995 đến 2004: một tỷ lệ tăng trưởng tốt 10,8% một năm*. Có vẻ là bạn hẳn sẽ kiếm

* Công bằng mà nói thì bản thân chỉ số S&P 500 còn làm tốt hơn, đạt được tăng trưởng 212,5% trong cùng kỳ.

được nhiều tiền, nếu như bạn đầu tư vào các quỹ này, không phải sao?

Hừ, không phải thế. Một nghiên cứu năm 2006 do Savant Capital thực hiện đã ít nhiều rọi luồng ánh sáng lạnh lùng lên các con số này. Hãy suy nghĩ lại cách mà Morningstar tạo ra các con số đó. Vào năm 2004, bạn xét tất cả các quỹ trong danh mục Large Blend, và xem chúng tăng trưởng bao nhiêu trong mười năm gần nhất.

Nhưng có gì đó bị thiếu ở đây: *các quỹ không tồn tại nữa.* Các quỹ tương hỗ không tồn tại mãi mãi. Một số quỹ ăn nên làm ra, một số thì chết đi. Những quỹ đã chết nhìn chung là các quỹ không làm ra tiền. Do vậy đánh giá giá trị của các quỹ tương hỗ trong một thập kỷ thông qua các quỹ còn tồn tại sau mười năm giống như đánh giá khả năng tránh đạn của phi công bằng cách đếm lỗ đạn trên những chiếc máy bay quay trở về. Nếu chúng ta không bao giờ thấy nhiều hơn một lỗ đạn trên mỗi chiếc máy bay thì điều đó có nghĩa là gì? Không phải do phi công của chúng ta giỏi tránh đạn của kẻ thù, mà là vì những chiếc máy bay bị trúng đạn hai lần sẽ rơi.

Nghiên cứu của Savant phát hiện ra rằng nếu bạn tính cả hiệu quả của cả các quỹ đã chết cùng với hiệu quả của các quỹ vẫn còn tồn tại, tỷ lệ tăng trưởng rơi xuống còn 134,5%, một mức không còn ấn tượng mấy, hơn 8,9% một năm. Nghiên cứu gần đây cũng chứng minh điều đó: một nghiên cứu toàn diện trên gần 5.000 quỹ năm 2011 trong tờ *Tạp chí tài chính* đã chỉ ra rằng tỷ suất lợi nhuận của 2.641 quỹ sống sót cao hơn khoảng 20% so với cùng chỉ số này nếu tính thêm những quỹ đã chết. Kích cỡ của hiệu ứng kẻ sống sót có thể khiến các nhà đầu tư ngạc nhiên, nhưng có lẽ không làm Abraham Wald thấy bất ngờ.

## TOÁN HỌC LÀ SỰ MỞ RỘNG LẼ THƯỜNG BẰNG CÁC BIỆN PHÁP KHÁC

Đến lúc này, cô bé tuổi teen đang nghe tôi nói sẽ dừng lời tôi lại và hỏi một câu hỏi khá hợp lý rằng: thế toán học ở đâu? Wald là một nhà toán học, điều đó đúng và không thể phủ nhận rằng lời giải của ông cho bài



toán lỗ đạn rất thông minh nhưng toán học liên quan gì tới việc đó? Chẳng thấy đẳng thức lượng giác nào, cũng chẳng có tích phân hay bất đẳng thức hay công thức nào cả.

Trước tiên: Wald quả thực có sử dụng các công thức. Tôi không đưa chúng vào câu chuyện, bởi vì đây chỉ mới là phần giới thiệu. Khi viết một cuốn sách giải thích việc sinh sản ở người cho các bé thiếu nhi, phần giới thiệu thường bỏ qua đoạn ướt át kể về việc làm cách nào em bé chui được vào trong bụng mẹ. Thay vào đó, bạn thường bắt đầu câu chuyện như thế này "Vạn vật trong tự nhiên đều biến đổi; cây cối rụng lá vào mùa đông để lại có thể nở hoa vào mùa xuân; con sâu bướm tầm thường chui vào kén để rồi lớn lên thành một chú bướm lộng lẫy. Em cũng là một phần của tự nhiên và do đó…"

Đó chính là phần giới thiệu của cuốn sách này.

Thế nhưng chúng ta đều là người lớn cả. Tạm gác lại sự lờ mờ này trong giây lát, một trang mẫu trong bản báo cáo thực sự của Wald trông như thế này:

lower bound to the $Q_i$ could be obtained. The assumption here is that the decrease from $q_i$ to $q_{i+1}$ lies between definite limits. Therefore, both an upper and lower bound for the $Q_i$ can be obtained.

We assume that

$$\lambda_1 q_i \le q_{i+1} \le \lambda_2 q_i ,$$

where $\lambda_1 < \lambda_2 < 1$ and such that the expression

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{\lambda_1^{\frac{j(j-1)}{2}}} < 1 - a_o \qquad \text{(A)}$$

is satisfied.

The exact solution is tedious but close approximations to the upper and lower bounds to the $Q_i$ for $i < n$ can be obtained by the following procedure. The set of hypothetical data used is

$$\begin{array}{ll} a_o = .780 & a_3 = .010 \\ a_1 = .070 & a_4 = .005 \\ a_2 = .040 & a_5 = .005 \\ \lambda_1 = .80 & \lambda_2 = .90 \end{array}$$

Condition A is satisfied, since by substitution

$$.07 + \frac{.04}{.8} + \frac{.01}{(.8)^3} + \frac{.005}{(.8)^6} + \frac{.005}{(.8)^{10}} = .20529 ,$$

which is less than

$$1 - a_o = .22 .$$

THE LOWER LIMIT OF $Q_i$

The first step is to solve equation 66. This involves the solution of the following four equations for positive roots $g_o$, $g_1$, $g_2$, $g_3$.

Hy vọng là nhìn không quá sốc.

Dù vậy, ý tưởng thực sự đằng sau sự sáng suốt của Wald không cần đến bất kỳ phát biểu hình thức nào như ở trên. Chúng ta đã giải thích điều đó mà không sử dụng bất kỳ ký hiệu toán học nào. Cho nên câu hỏi của cô học trò của tôi vẫn có ý nghĩa. Vậy toán học là gì? Phải chăng đó chỉ là lẽ thường?



Đúng thế. Toán học là lẽ thường. Ở một mức độ cơ bản nào đó, điều này rất dễ hiểu.

Liệu bạn có thể giải thích cho ai đó tại sao bảy thứ cộng năm thứ cho ra cùng một kết quả với năm thứ cộng bảy thứ? Bạn không thể vì kiến thức này đã gắn liền với cách tư duy của chúng ta về sự kết hợp các thứ với nhau. Các nhà toán học thích đặt tên cho hiện tượng mà chúng ta mô tả được bằng lẽ thường: thay vì nói "*cái này* cộng với *cái kia* cũng chính là *cái kia* cộng với *cái này*" thì họ nói "phép cộng có tính giao hoán." Hoặc, vì thích các ký hiệu, họ sẽ viết:

Với mọi số a và b, ta có a + b = b + a.

Mặc dù công thức có vẻ nghiêm túc và cứng nhắc nhưng nó chỉ đang mô tả một kiến thức hiển nhiên mà đến một đứa trẻ cũng hiểu được theo bản năng.

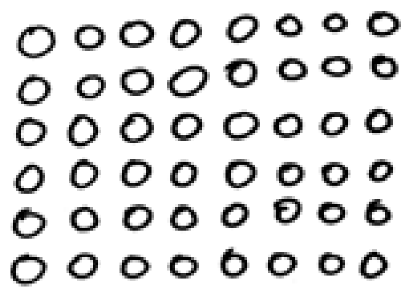
Phép nhân lại là một câu chuyện hơi khác một chút. Công thức trông khá tương tự:

Với mọi số a và b, ta có a × b = b × a.

Trí óc chúng ta, khi xem xét biểu thức này, không nói "đương nhiên" ngay lập tức như trường hợp của phép cộng. Có phải "hiển nhiên" là hai bộ gồm sáu thứ có số lượng bằng sáu bộ gồm hai thứ?

Có thể không; nhưng nó có thể *trở thành* lẽ thường. Đây là ký ức toán học sớm nhất của tôi. Tôi đang nằm trên sàn trong ngôi nhà của bố mẹ, má áp vào thảm lông, nhìn ngắm dàn âm thanh. Rất có thể khi đó tôi đang nghe mặt hai album *Blue* của nhóm Beatles. Có lẽ lúc đó tôi sáu tuổi. Đây là những năm 70 nên dàn âm thanh được bọc một tấm gỗ ép có một dãy hình chữ nhật các lỗ thoáng được đục ở mặt bên. Tám lỗ theo chiều ngang, sáu lỗ theo chiều từ trên xuống dưới. Tôi nằm đó, nhìn vào các lỗ ấy. Sáu hàng lỗ. Tám cột lỗ. Bằng cách tập trung ánh nhìn qua lại, tôi có thể chuyển giữa việc nhìn các hàng và các cột. Sáu hàng, mỗi hàng tám lỗ. Tám cột, mỗi cột sáu lỗ.

Và rồi tôi nhận ra – tám nhóm sáu cũng giống như sáu nhóm tám. Không phải vì đó là một quy tắc tôi được dạy, mà bởi vì nó không thể khác được. Số lượng lỗ trên tấm ốp là số lượng lỗ trên tấm ốp, bất kể ta có đếm chúng theo cách nào.



DÀN ÂM THANH CỦA BỐ MẸ TÔI, 1977

Chúng ta có xu hướng dạy toán học như là một dãy các quy tắc. Bạn học chúng theo thứ tự và phải tuân theo chúng, vì nếu không, bạn sẽ nhận điểm C-. *Đó không phải là toán học*. Toán học là việc nghiên cứu các sự việc xảy ra theo một cách nhất định nào đó bởi vì chúng không thể xảy ra theo cách nào khác.

Tuy nhiên, không phải mọi thứ trong toán học đều có thể được giải thích rõ ràng với trực giác như phép cộng và phép nhân. Bạn không thể thực hiện phép tính vi phân và tích phân bằng lẽ thường. Nhưng phép tính vi phân và tích phân vẫn bắt nguồn từ lẽ thường – Newton lấy trực giác vật lý của chúng ta về các vật chuyển động trên đường thẳng, phát biểu nó ở dạng hình thức, và rồi xây dựng trên cấu trúc hình thức đó một mô tả toán học chung cho chuyển động. Một khi nắm được lý thuyết của Newton, bạn có thể áp dụng nó để giải các bài toán vốn sẽ khiến bạn đau đầu nếu không có trợ giúp của các phương trình. Theo cùng cách đó, ta có các hệ thống trí tuệ bẩm sinh để đánh giá khả năng của một kết quả không chắc chắn. Nhưng các hệ thống này khá yếu và không đáng tin cậy, đặc biệt đối với các sự kiện hiếm khi xảy ra. Đó là lúc chúng ta gia cố trực giác bằng một vài định lý và kỹ thuật chắc chắn, đúng chỗ, và dựa vào đó thành lập một lý thuyết xác suất toán học.



Thứ ngôn ngữ chuyên môn mà các nhà toán học trao đổi với nhau là công cụ tuyệt vời để truyền đạt các ý tưởng phức tạp một cách chính xác và nhanh chóng. Nhưng sự xa lạ của thứ ngôn ngữ này có thể tạo cho người ngoại đạo cảm giác về một lĩnh vực suy nghĩ hoàn toàn khác biệt với lối tư duy thông thường. Đó chính là chỗ sai lầm. Toán học như một bộ phận cơ thể nhân tạo chạy bằng năng lượng hạt nhân gắn vào lẽ thường của ta, giúp gia tăng tầm với và sức mạnh của nó lên gấp bội. Cho dù toán học có sức mạnh to lớn, cũng như các ký hiệu và sự trừu tượng đôi khi khá khó hiểu của nó, phần lao động trí óc thực sự liên quan tới toán học chỉ hơi khác một chút cái cách chúng ta tư duy về các vấn đề thực tiễn hơn. Tôi thấy khá hữu ích khi ghi nhớ hình ảnh anh chàng Người Sắt Tony Stark đấm thủng một lỗ trên tường gạch. Một mặt, thứ lực thực sự phá vỡ bức tường không phải đến từ cơ bắp của Tony Stark, mà là do một chuỗi cơ chế phụ được đồng bộ hóa rất tinh tế chạy bằng năng lượng từ một máy phát hạt beta nhỏ gọn mang lại. Mặt khác, từ góc nhìn của Tony Stark, việc anh ta đang làm là đấm vào bức tường, hệt như cách anh ta vẫn làm ngay cả khi không có bộ áo giáp. Chỉ là sẽ khó hơn rất rất nhiều.

Hay nói theo kiểu của Clausewitz: toán học là sự mở rộng lẽ thường bằng các biện pháp khác.*

Nếu không có cấu trúc nghiêm ngặt của toán học, lẽ thường có thể đưa ta lạc lối. Đó là điều đã xảy ra với các sĩ quan muốn bọc giáp cho các bộ phận máy bay vốn đã đủ chắc chắn. Nhưng toán học hình thức nếu không có lẽ thường – tức là không có sự tác động lẫn nhau giữa lập luận trừu tượng với trực giác của ta về số lượng, thời gian, không gian, chuyển động, hành vi và sự không chắc chắn – sẽ chỉ là

* Trong *Bàn về chiến tranh*, danh tướng kiêm nhà tư tưởng quân sự người Phổ Carl von Clausewitz cho rằng, "Chiến tranh là sự tiếp nối chính trị bằng các biện pháp khác." (ND)

một bài tập khô khan về việc tuân thủ quy tắc hay công việc kế toán. Nói cách khác, toán học sẽ thực sự là thứ toán trong cách nghĩ của cô sinh viên học môn phép tính vi phân và tích phân hay bực bội kia.

Đó là một nguy cơ thực sự. Trong tiểu luận "Nhà toán học" năm 1947, John von Neumann đã cảnh báo:

> Khi một lĩnh vực toán học xa rời nguồn gốc thực nghiệm, hoặc hơn thế, nếu đó là phân ngành thuộc thế hệ thứ hai hay thứ ba, chỉ được truyền cảm hứng gián tiếp từ ý tưởng đến từ "thực tại", thì nó đang ở giữa vòng nguy hiểm khôn lường. Nó sẽ trở nên ngày càng thuần túy duy mỹ, ngày càng thuần túy *nghệ thuật vị nghệ thuật*. Điều này không hẳn xấu, nếu lĩnh vực này vẫn liên quan đến các chủ thể tương quan có mối liên hệ thực nghiệm gần gũi hơn hoặc nếu nó chịu ảnh hưởng của những người có thị hiếu phát triển đặc biệt. Nhưng mối nguy hiểm đáng sợ hơn là lĩnh vực này sẽ phát triển theo con đường có ít vật cản nhất, nguy cơ rằng dòng chảy, khi quá xa rời nguồn, sẽ chia tách thành vô số các nhánh tầm thường, và rồi lĩnh vực đó sẽ trở thành một mớ vô tổ chức các chi tiết và sự phức tạp. Nói cách khác, khi bị tách khỏi nguồn gốc thực nghiệm, hoặc sau sự giao phối cận huyết khá trừu tượng, một chủ đề toán học sẽ đối mặt với nguy cơ thoái hóa.*

## NHỮNG LOẠI TOÁN NÀO SẼ XUẤT HIỆN TRONG CUỐN SÁCH NÀY?

Nếu hiểu biết toán học của bạn hoàn toàn đến từ trường lớp thì những gì bạn được dạy là một câu chuyện rất hạn chế, xét theo một

* Cách nhìn của von Neumann về bản chất toán học rất kiên định, nhưng cũng công bằng nếu cảm thấy mếch lòng khi mô tả toán học phục vụ vẻ đẹp thuần túy kết thúc trong "sự thoái hóa". Von Neumann viết điều này chỉ 10 năm sau triển lãm *entartene Kunst* ("nghệ thuật thoái hóa") của Hitler ở Berlin, kẻ cho rằng "nghệ thuật vị nghệ thuật" là quan điểm mà người Do Thái ưa thích và được tạo ra để làm suy yếu "nghệ thuật hiện thực" lành mạnh cần có của nước Đức mạnh mẽ. Trong nhiều trường hợp, người ta thấy dè chừng đối với các lĩnh vực toán học không phục vụ mục đích rõ ràng. Một tác giả có quan điểm chính trị khác tôi, đến phần này, rất có thể sẽ đề cập đến công trình tràn đầy năng lượng của von Neumann về việc phát triển và chế tạo vũ khí hạt nhân.

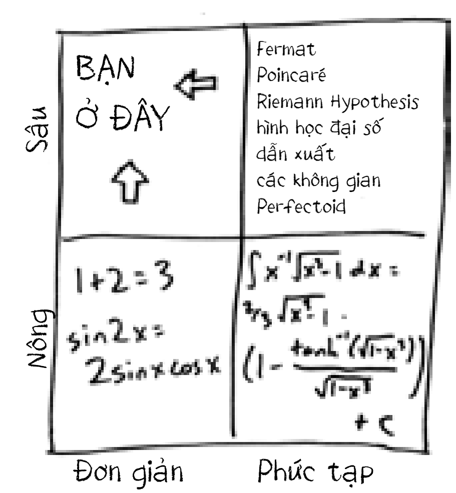


mặt quan trọng thì còn sai nữa. Toán học trong trường học được tạo thành từ một chuỗi kiến thức và quy luật, các kiến thức thì không thể bác bỏ, còn các quy luật thì buộc phải tuân theo và không được phép nghi ngờ. Các vấn đề toán học được xem là hoàn toàn chắc chắn.

Toán học không chắc chắn. Ngay cả đối với các đối tượng nghiên cứu cơ bản, như các con số và đối tượng hình học, những gì chúng ta không biết còn nhiều hơn rất nhiều so với hiểu biết của chúng ta. Và những điều chúng ta biết chỉ có được sau vô số nỗ lực, tranh luận và nhầm lẫn. Tuy nhiên, tất cả mồ hôi công sức và sự không rõ ràng đều đã được sàng lọc một cách cẩn thận khỏi sách giáo khoa của bạn.

Đương nhiên là có rất nhiều kiến thức. Chẳng bao giờ có nhiều tranh cãi về việc 1 + 2 = 3 có đúng không. Câu hỏi *bằng cách nào và liệu chúng ta có thể thực sự chứng minh* được rằng 1 + 2 = 3, điều đã nghiêng ngả một cách không mấy dễ chịu giữa toán học và triết học, lại là một câu chuyện khác – chúng ta sẽ bàn về vấn đề này ở cuối cuốn sách. Nhưng phép tính đó chính xác là một sự thật rõ ràng. Các tranh luận nằm ở những chỗ khác. Chúng ta sẽ đi sâu vào chúng ở những lần khác.

Các kiến thức toán học có thể đơn giản hoặc phức tạp, có thể hời hợt hoặc sâu sắc. Điều này chia vũ trụ toán học thành bốn góc phần tư:



Các kiến thức số học cơ bản, như 1 + 2 = 3, thì vừa đơn giản vừa hời hợt. Các đồng nhất thức cơ bản như sin(2x) = 2 sin x cos x hay công thức giải phương trình bậc hai cũng vậy: mặc dù chúng có thể hơi khó hơn một chút so với việc thuyết phục bạn rằng 1 + 2 = 3, nhưng suy cho cùng thì chúng cũng không có quá nhiều khái niệm.

Chuyển qua góc phức tạp/hời hợt, bạn có bài toán nhân hai số có mười chữ số, hay phép tính tích phân xác định phức tạp, hay sau vài năm học chương trình sau đại học, là bài toán vết Frobenius trên một dạng modular có số dẫn bằng 2377. Hoàn toàn có khả năng rằng vì lý do nào đó, bạn cần biết câu trả lời cho các bài toán trên, và không thể phủ nhận rằng câu trả lời có thể ở đâu đó giữa sự khó chịu và việc không thể giải được bằng tay; hay trong trường hợp bài toán dạng modular, bạn thậm chí phải tốn nhiều năm học hành tử tế chỉ để hiểu đề bài. Nhưng việc biết các câu trả lời cũng không thực sự làm giàu vốn hiểu biết của bạn về thế giới.

Góc phức tạp/sâu sắc là nơi các nhà toán học chuyên nghiệp như tôi dành phần lớn thời gian của mình. Đó là nhà của các định lý và giả thuyết nổi tiếng: giả thuyết Riemann, định lý cuối cùng của Fermat*, giả thuyết Poincaré, bài toán P so với NP, định lý Gödel… Mỗi định lý này bao gồm các ý tưởng với ý nghĩa sâu sắc, tầm quan trọng nền tảng, vẻ đẹp sững sờ và các chi tiết chuyên môn vô cùng khó hiểu, và mỗi định lý đều là nhân vật chính trong các cuốn sách về chính nó.

Nhưng không phải cuốn sách này. Cuốn sách này sẽ bàn về góc trên bên trái: đơn giản và sâu sắc. Các ý tưởng toán học mà chúng ta muốn nói đến là các bài toán có thể được tiếp cận một cách vừa trực tiếp vừa có lợi, bất kể việc học toán của bạn dừng lại ở tiền đại số hay mở rộng hơn. Và chúng không phải "kiến thức thuần túy", như một phát biểu đơn giản trong số học – chúng là các nguyên lý có ứng dụng vượt ra khỏi

* Định lý này, trong giới chuyên môn, giờ được gọi là định lý Wiles, vì Andrew Wiles đã chứng minh nó (với sự trợ giúp đắc lực từ Richard Taylor) còn Fermat trước đó chưa chứng minh được. Nhưng cái tên truyền thống có lẽ sẽ không bao giờ bị thay thế.



suy nghĩ của bạn. Chúng là các dụng cụ tốt nhất trên chiếc đai công cụ, và khi được sử dụng hợp lý sẽ giúp bạn không phạm sai lầm.

Toán học thuần túy có thể trở thành một kiểu tu viện, một nơi yên tĩnh, an toàn tránh xa khỏi các tác động tiêu cực của những hỗn độn và không nhất quán của thế giới. Tôi đã lớn lên bên trong những bức tường đó. Trong khi những đứa trẻ học toán khác bị hấp dẫn bởi những ứng dụng của toán học trong vật lý, nghiên cứu về gen hay nghệ thuật bí hiểm của việc quản lý quỹ phòng hộ, thì tôi lại không muốn một *sự nổi loạn** như vậy†. Hồi học cao học, tôi dành trọn tâm trí vào lý thuyết số, lĩnh vực mà Gauss gọi là "nữ hoàng của toán học, lĩnh vực thuần túy nhất trong các lĩnh vực thuần túy, khu vườn được khóa kín ở trung tâm của tu viện, nơi chúng tôi suy ngẫm những câu hỏi về các con số và phương trình đã làm đau đầu các nhà toán học Hy Lạp và cũng bị làm đau đầu chẳng kém gì 2.500 năm trước.

Đầu tiên, tôi nghiên cứu lý thuyết số với nét đặc trưng cổ điển, chứng minh các kết quả về tổng của các lũy thừa bậc bốn của các số nguyên mà, nếu ai đó khẩn khoản tôi vẫn còn đem kể được cho gia đình trong Lễ Tạ ơn, ngay cả khi tôi không thể giải thích cho họ hiểu cách tôi chứng minh chúng. Nhưng chả mấy chốc tôi bị dụ dỗ vào các thế giới thậm chí còn trừu tượng hơn, nghiên cứu các vấn đề về các đối tượng cơ bản – các đối tượng như "biểu diễn Galois modular thặng dư," "đối đồng điều của lược đồ moduli," "hệ động lực trên không gian thuần nhất" – không thể đem ra bàn luận bên ngoài phạm vi các phòng hội thảo hay phòng sinh hoạt chung cho giảng viên trải dài từ Oxford tới Princeton tới

* Thú thực, tôi có dành một phần giai đoạn đầu những năm hai mươi tuổi suy nghĩ về việc trở thành một Tiểu Thuyết Gia Văn Học Nghiêm Túc. Tôi thậm chí đã hoàn thành một cuốn Tiểu Thuyết Văn Học Nghiêm Túc *Vua châu chấu* và đã được xuất bản. Nhưng trong quá trình đó, tôi phát hiện rằng mỗi ngày tôi dành cho việc viết cuốn Tiểu Thuyết Văn Học Nghiêm Túc thì đến nửa ngày tôi chán nản cầu mong được giải các bài toán.

† Nguyên văn "such rumspringa" chỉ một nghi thức của người Amish ở Mỹ, cho phép thanh niên từ 16 tuổi có thể tách khỏi cộng đồng, được làm những điều trước đó bị cấm, sau đó sẽ tự quyết định xem mình có muốn được rửa tội hay không (ND).

Kyoto tới Paris tới Madison, Wisconsin, nơi tôi đang giảng dạy.

Khi tôi nói với bạn rằng các vấn đề này rất xúc động, ý nghĩa, đẹp đẽ và tôi sẽ không bao giờ chán việc suy nghĩ về chúng, thì bạn hãy cứ tin tôi đi, vì sẽ cần một quá trình học tập lâu dài chỉ để đi được tới nơi mà các đối tượng của nghiên cứu lọt vào tầm mắt. Nhưng một điều thú vị đã xảy ra. Các nghiên cứu của tôi càng trừu tượng và xa rời cuộc sống thì tôi càng bắt đầu chú ý tới việc toán học diễn ra ở thế giới bên ngoài những bức tường kia nhiều như thế nào. Không phải biểu diễn Galois hay đối đồng điều, mà là các ý tưởng đơn giản hơn, cổ xưa hơn và vẫn sâu sắc như thế – ở góc phần tư phía tây bắc của hình vuông nhận thức. Tôi bắt đầu viết bài cho các báo và tạp chí về cách thế giới được nhìn qua một thấu kính toán học, và tôi ngạc nhiên phát hiện ra rằng, thậm chí những người nói rằng họ ghét toán cũng sẵn sàng đọc chúng. Đó là một hình thức dạy toán, nhưng lại rất khác so với những gì chúng ta làm trong một lớp học.

Điểm giống với một lớp học là độc giả được yêu cầu thực hiện một nhiệm vụ nào đó. Trở lại với von Neumann trong bài tiểu luận "Nhà toán học": "Việc hiểu cơ chế hoạt động của một chiếc máy bay, và lý thuyết về các lực giúp nâng, đẩy nó khó khăn hơn việc đi máy bay, được nâng lên và vận chuyển bởi máy bay – hay thậm chí là việc lái nó. Nếu ta chưa từng quen việc vận hành, sử dụng một quá trình chưa đồng hóa nó theo một cách bản năng và kinh nghiệm thì ta khó mà thu được hiểu biết về quá trình đó."

Nói cách khác: rất khó để *hiểu* toán nếu không *làm* toán. Như Euclid nói với Plotemy, hay có thể, như Menaechmus nói với Alexander Đại đế, trong hình học không có con đường dành riêng cho các bậc đế vương. (Hãy nhìn nhận thực tế là các câu châm ngôn cổ nổi tiếng gắn liền với các nhà khoa học cổ đại có thể được bịa ra nhưng ý nghĩa của chúng không hề giảm đi vì điều đó.)

Cuốn sách này không phải loại sách trong đó tôi có những cử chỉ cung kính, mơ hồ trước những tượng đài vĩ đại của toán học và hướng dẫn bạn chiêm ngưỡng chúng từ xa thế nào cho đúng. Ở đây, chúng ta sẽ thực sự bắt tay vào làm việc. Chúng ta sẽ làm các phép tính toán. Sẽ có một vài công thức và phương trình khi tôi cần chúng để làm rõ luận điểm. Không cần dùng đến thứ toán học hình thức nào cao hơn số học, mặc dù nhiều khái niệm toán học khác cũng sẽ được giải thích. Tôi sẽ vẽ thô một vài đồ thị và biểu đồ. Chúng ta sẽ bắt gặp một vài chủ đề toán học ở bậc phổ thông, nhưng bên ngoài môi trường quen thuộc của chúng; chúng ta sẽ xem xét cách các hàm lượng giác mô tả mức độ liên quan giữa hai biến số, xem phép tính vi phân và tích phân nói gì về mối quan hệ giữa các hiện tượng tuyến tính và phi tuyến tính, và cách công thức giải phương trình bậc hai trở thành một hình mẫu nhận thức cho việc điều tra khoa học. Chúng ta cũng sẽ xem xét một số chủ đề thường bị bỏ qua cho tới bậc đại học hoặc cao học, như cuộc khủng hoảng của lý thuyết tập hợp, một chủ đề được trình bày như một phép ẩn dụ cho luật pháp Tòa án tối cao và phán quyết của trọng tài bóng chày; những sự phát triển gần đây trong lý thuyết số giải tích minh họa sự liên quan giữa cấu trúc và sự ngẫu nhiên; cùng lý thuyết thông tin và thiết kế tổ hợp, điều giúp giải thích làm cách nào một nhóm sinh viên chưa tốt nghiệp ở đại học MIT trúng hàng triệu đô-la chỉ nhờ vào hiểu biết về cách thức vận hành xổ số của bang Massachusetts.

Thi thoảng sẽ có một vài chuyện nhặt nhạnh về các nhà toán học đáng chú ý, và một vài giả thuyết mang tính triết học. Thậm chí còn có một hoặc hai chứng minh. Nhưng sẽ không có bài tập về nhà, và không có bài kiểm tra nào cả.